Osaka University Knowledge Archive

Title	ニ三ノ Matrixfunktionen ニツイテ
Author(s)	北川, 敏男; 浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 31 p.6-p.11
Issue Date	1935-02-27
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74017
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

95. 二三ノ Matrixfunktionen ニツイテ

北川敏男，浅野啓三（阪大）

$A=(a_{ik})(i,k=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ n 次ノ Matrix, a_{ik} ハ real 又ハ komplex variable トシ $f(A)$ ヲ A ノ stetige Matrixfunktion トスル。[1] 以下 A ノ characteristic equation ヲ

$$\varphi(x)=|xE-A|=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots\cdots+c_n=0$$

$$c_\nu=(-1)^\nu\sum_{\{i_1,\cdots,i_\nu\}} a_{\{i_1,\cdots,i_\nu\},\{i_1,\cdots,i_\nu\}}{}^{(2)} \quad (\nu=1,2,\cdots,n)$$

ソノ根，即チ Eigenwert ヲ $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$ トスル。

定理 1) real 又ハ komplex variable ノ連続ナル Matrixfunktion $f(A)$ デ

(1) $f(A)=$ 関シテハ A ノ $(n-1)$ 個ノ列（又ハ行）ヲ任意ニ ~~fix~~ シタ場合、残リノ列ノ Variable ニ関シテ連続ニナルコトヲ仮定スレバ以下ノ証明ニハ充分デアル。

(2) $a_{\{i_1,\cdots,i_\nu\},\{k_1,\cdots,k_\nu\}}$ ハ A ノ $i_1,\cdots\cdots,i_\nu$ 行及ビ $k_1,\cdots\cdots,k_\nu$ 列ヲトッテ作ッタ ν 次ノ行列式

(1) $f(AB)=f(BA)$, $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$

ヲ満足スルモノハ $c_1,\cdots\cdots,c_n$ ノ函数デアル。

（証明） 連続性ニヨッテ (1) ハ

(2) $f(P^{-1}AP)=f(A)$

ト equivalent デアル. Matrix A ハ

(2) $f(P^{-1}AP)=f(A)$

ト equivalent デアル. Matrix A ハ

$$A_1=\begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ c_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ト同ジ characteristic equation ヲ有スル. 従ッテAノ Eigenwert ガ全部相異ルナラバ、A トA₁トハ Elementarteiler ガ一致スルカラ Matrix $P\ (|P|\neq 0)$ ヲ適當ニトッテ

$$P^{-1}AP=A_1$$

トスルコトガ出來ル、故ニ

(3) $f(A)=f(A_1)$

Eigenwert ノ中デ等シイモノガアル場合デモ連續性ニヨッテ (3) ハヤハリ成立スル、逆ニ $c_1,\cdots\cdots,c_n$ ハ (1) ヲ滿足スルカラ, $c_1,\cdots\cdots,c_n$ ノ函數ハ (1) ヲ滿足スル。(証明終リ)

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \\ c_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ c_1 & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \\ c_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=A_0B$$

今 $E_1(t)=\begin{pmatrix} t & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ トシ

(4) $f(ABE_1(t))=f(BAE_1(t))$ （従ッテ $=f(AE_1(t)B)$）

ヲ假定スレバ

$$B_1=E_1(t)^{-1}BE_1(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ c_nt & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{トシテ}$$

$$f(A_0B_1)=f(A_0E_1(t)^{-1}BE_1(t))=f(A_0E_1(t)^{-1}E_1(t)B)=f(A_0B)=f(A_1)$$

$$\therefore \quad f(A)=f(A_1)=f\begin{pmatrix} c_1t & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n-1}t & & & 1 \\ c_n & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$t\to 0 \text{ トスルト} \quad f(A)=f\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \vdots & & 1 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

従ッテ $f(A)$ ハ c_n，即チ行列式 $|A|$ ノミノ函數ニナル、ヨッテ中野氏ノ証明サレタ定理ヲ得ル[1]。

定理 2) 連續ナル *Matrixfunktion* $f(A)$ ガ

$$f(ABC)=f(BAC)$$

ヲ滿足スルナラバ、$f(A)$ ハ行列式 $|A|$ ノミノ函數デアル。

特別ノ函數トシテ

$$S(AB)=S(BA), \quad S(A+B)=S(A)+S(B)$$

トナルモノヲ考ヘルト、ソレハ *linear* デアルカラ容易ニ

$$S(A)=ac, \quad (a\text{ハ常數})$$

トナルコトガ分ル。又

$$n(AB)=n(A)n(B)$$

トナルモノハ $n(A)=\varepsilon|C_n|^{\rho}$ $(\varepsilon=e^{im\theta},\ |A|=|C_n|e^{i\theta},\ m\ \mathit{integer})$ トナル。[1]

輯報ノ Vol. XI. NO. 1 ニ於テ中野氏ハ南雲氏ノ證明サレタ *stetige Vektorfunktion* ニ關スル定理[2]ノ別證ヲ考ヘラレタ。[3] 南雲氏ハ連續性ヲ假定サレタガ、ソレハ必要デハナイ、ソノコトハ中野氏ノ證明カラモ分ル、尚定理ハ任意ノ *Körper* ニ於テ成立スル. *Körper* デナクテモ單位元ヲ有スル *Ring* デアレバヨイ。更ニソレラノ *Korper* 或ハ *Ring* ハ *kommutativ* デアルコトヲ要シナイ、此処デソノ定理ノ別證ヲ考ヘテミル。定理ハ次ノ樣ニ述ベルコトガ出來ル。

定理:　Kヲ單位元ヲ有スル *Ring* トシ、Kノ任意ノ (n,m)-*Matrix* X ニ一意的ニ Kノ (n,l)-*Matrix* Y ガ對應シ、此ノ對應ニ於テ PX ニハ PY ガ對應スルモノトスル。

---

(1) *H. Nakano: Über eine stetige Matrixfunktion.* (學士院記事 VIII. NO.6)

(2) *M. Nagumo: Über eine kennzeichnende Eigenschaft der Linear-kombination von Vektoren und ihre Anwendung.* (*Göttinger Nachrichten* 1933)

(3) *H. Nakano: Über die Matrixfunktion.* (輯報 Vol. XI. NO. 1)

但シPハKノ任意ノ(n,n)-Matrix デ $n\geqq 2$. 然ルトキハ(m,l)-Matrix A が存在シ $Y=XA$.

lemma: Kノ任意ノVektor $\mathfrak{X}=(x_1,\cdots\cdots x_m)$=, KノVektor $\mathfrak{Y}=(y_1,\cdots\cdots,y_l)$ が一意的=對應シ、$\mathfrak{X}$ノlinear Kombination $\sum_i \alpha_i \mathfrak{X}_i$ =ハ對應スル$\mathfrak{Y}$ノlineare Kombination $\sum_i \alpha_i \mathfrak{Y}_i$ が對應スルナラバ, (m,l)-Matrix A が存在シ $\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}A$.

(証明) $\varepsilon_i=(\overbrace{0,\cdots 0,1}^{i},0\cdots 0)\to \mathfrak{a}_i=(a_{i1},\cdots,a_{il})\ (i=1,2,\cdots,m)$ トシ $A=(a_{ik})$ トスレバ $\mathfrak{a}_i\longrightarrow\varepsilon_i A$.

$$\therefore\quad \mathfrak{X}=\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_i\longrightarrow\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_i A=\mathfrak{X}A.$$

$$X=\begin{pmatrix}x_{11},\cdots\cdots x_{1m}\\ \cdots\cdots\\ x_{n1}\cdots\cdots x_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{X}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{X}_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_{11},\cdots\cdots y_{1l}\\ \cdots\cdots\\ y_{n1}\cdots\cdots y_{nl}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Y}_1\\ \vdots\\ \mathfrak{Y}_n\end{pmatrix}$$

トシ、X=現ハレル i-行目ノZeilenvektor $\mathfrak{X}_i$=, 對應スルMatrix Yノ i-行目ノZeilenvektor $\mathfrak{Y}_i$ヲ對應サセル. $\mathfrak{X}_i\longrightarrow\mathfrak{Y}_i$

$$X\to Y,\ E_{1i}X=\begin{pmatrix}\mathfrak{X}_i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow E_{1i}Y=\begin{pmatrix}\mathfrak{Y}_i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\quad (E_{ij}\text{ ハ Matrizeneinheiten})$$

トナルカラ、Zeilenvektor $\mathfrak{X}$ノMengeヲ考ヘルト、ソノ各々=Vektor $\mathfrak{Y}$ が一意的=對應スルコトが分ル。

逆=$\mathfrak{X}_i\longrightarrow\mathfrak{Y}_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ヲ任意ノ$n$個ノ對應スルVektorトスレバ

$$X=\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{pmatrix} \longrightarrow Y=\begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_n \end{pmatrix}$$ ハ上ノ定理ニ於ケル *Matrix*

ノ對應ニナル、又

$$P=\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}, \quad PX=\begin{pmatrix} \alpha_1\mathfrak{x}_1+\alpha_2\mathfrak{x}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow PY=\begin{pmatrix} \alpha_1\mathfrak{y}_1+\alpha_2\mathfrak{y}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(n \geqq 2!)$

デアルカラ　$\alpha_1\mathfrak{x}_1+\alpha_2\mathfrak{x}_2 \longrightarrow \alpha_1\mathfrak{y}_1+\alpha_2\mathfrak{y}_2$

従ッテ *Vektor* $\mathfrak{x}$ ノ *lineare Kombination* ニハ，對應スル *Vektor* $\mathfrak{y}$ ノ *lineare Kombination* ガ對應スル．ヨッテ *lemma* ニヨリ $\mathfrak{y}=\mathfrak{x}A$.

$$\therefore \quad Y=\begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 A \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n A \end{pmatrix}=XA$$